

# Evaluación de la incertidumbre de medida de ángulos, distancias y desniveles medidos con instrumentación topográfica

José Luis García Balboa<sup>1</sup>, Antonio Miguel Ruiz Armenteros<sup>2</sup>, José Luis Mesa Mingorance<sup>3</sup>

Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodésica y Fotogrametría. Universidad de Jaén. 23071 Jaén, España

<sup>1</sup>jlbalboa@ujaen.es, <sup>2</sup>amruiz@ujaen.es, <sup>3</sup>jlmesa@ujaen.es

---

## Resumen

La medición de ángulos, distancias y desniveles forma parte de los métodos de captura de información geoespacial en el ámbito de la Geomática. Sin embargo, el resultado de la medición de cualquier mensurando sólo está completo cuando se acompaña de la correspondiente incertidumbre de medida. Frecuentemente, en muchos textos y artículos sobre Topografía se presenta la evaluación de la incertidumbre de medida de los ángulos, distancias y desniveles desde el enfoque del error, con un tratamiento basado en errores accidentales. En este artículo se presenta una revisión de las fuentes de incertidumbre que afectan a los mensurandos mencionados y se evalúa la incertidumbre de medida, para cada uno de ellos, pasando del enfoque centrado en el error al enfoque centrado en la incertidumbre.

Palabras clave: incertidumbre, error, precisión, exactitud, GUM, ISO 17123, ángulos, EDM, desniveles, topografía, geodesia, geomática

---

## Measurement uncertainty evaluation for angles, distances and levelling height differences surveyed with surveying instruments

### Abstract

The measurement of angles, distances and height differences forms part of capture methods of geospatial information in the field of Geomatic. However, the measurement result of any measurand is only complete when it is accompanied by the corresponding measurement uncertainty. On many Surveying Engineering books and papers, the measurement uncertainty of angles, distances and height differences is frequently treated from an “error” point of view with an approach based on random errors. In this paper, we review the sources of uncertainty that affect to the mentioned measurands and evaluate their measurement uncertainties based on an “uncertainty” instead of an “error” approach.

Keywords: uncertainty, error, precision, accuracy, GUM, ISO 17123, angles, EDM, levelling, surveying, geodesy, geomatics

---

## 1. Introducción

La medición de ángulos, distancias y desniveles forma parte de los métodos de captura de información geoespacial en el ámbito de la Topografía. La medición de estos mensurandos es, hoy en día, una tarea relativamente cómoda y sencilla gracias a la instrumentación disponible. Estaciones totales robotizadas y niveles digitales de alta precisión, entre otros, facilitan el trabajo de campo, pero el resultado de una medición es sólo una aproximación o estimación del valor de la cantidad específica medida (mensurando), y éste debería ir acompañado de un valor cuantitativo que nos dé una idea de su calidad, es decir, de un parámetro que caracterice la dispersión de los valores que podrían atribuirse razonablemente al mismo. En tal momento, se entiende que el resultado de la medición está completo.

La evaluación de este parámetro de calidad debe realizarse de la forma más rigurosa posible, ya que podrá influir a la hora de tomar decisiones acerca del instrumental y metodología topográfica más adecuada en cada caso concreto.

Este parámetro, la *incertidumbre*, es el objeto principal de la *Guía para la expresión de la incertidumbre de medida*, comúnmente denominada GUM (ISO, 2008), elaborada conjuntamente por diversas organizaciones internacionales (Oficina Internacional de Pesas y Medidas BIPM, Organización Internacional de Metrología OIML, Organización Internacional de Normalización ISO,...) y adoptada, en la actualidad, por un gran número de prestigiosas sociedades científicas

internacionales. La GUM, publicada en 1993 y revisada en 1995 y 2008, representa la referencia más completa y aceptada actualmente sobre cómo expresar y evaluar la *incertidumbre* de medida. De aplicación fundamental en metrología, está pensada para que se pueda aplicar a la mayoría de los resultados de medida, incluyendo, p. ej., los resultados asociados a la investigación básica y aplicada, y a la ingeniería. La importancia de esta guía es que es universal, y por tanto, aplicable a todo tipo de mediciones.

Existen una serie de términos relacionados con la incertidumbre de medida como son *error*, *precisión*, *exactitud*, *repetibilidad*, *reproducibilidad*, etc., que deben tratarse con cuidado, evitando su confusión y usándolos de manera consistente a como se definen en otros documentos internacionales. La definición de todos ellos viene recogida en el *Vocabulario internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales y términos asociados* (3ª edición) (ISO, 2007; CEM, 2008), comúnmente conocido como VIM. El VIM debe acompañar siempre a la GUM ya que los dos documentos son complementarios y han sido publicados por la ISO en consenso con otras muchas organizaciones internacionales. Una revisión del uso de estos términos se puede encontrar en Ruiz y otros (2010).

En muchos textos y artículos se presenta el estudio de los denominados errores de medida con la finalidad de cuantificar la imperfección del método e instrumento utilizado. Realmente se trataría, desde el enfoque de la incertidumbre, de contribuciones a la incertidumbre, no de errores. Por otro lado, es común que se presenten algunas

incoherencias en su tratamiento, entre las que se podrían citar: tratar la mayoría de errores como “máximos”, con una probabilidad de cobertura supuestamente elevada, en torno al 95%, 98%, 99%... pero que nunca o raramente está definida de forma explícita; mezclar “errores” con distintas probabilidades de cobertura; no considerar algunos de los “errores” como independientes cuando realmente lo son; etc.

A modo de ejemplo, con bastante frecuencia se suele evaluar el denominado como “error total” por dirección angular horizontal mediante la componente cuadrática de los denominados “errores accidentales de verticalidad, lectura, puntería y dirección”:

- El “error de verticalidad”, en el caso de instrumentos dotados de compensadores, se suele evaluar en función a la desviación típica que ofrece el fabricante, y por tanto con una probabilidad de cobertura, conocida, del 68%.
- El “error de lectura”, sobre todo con instrumentos electrónicos, se suele considerar igual al valor de la incertidumbre angular de medida del equipo, valor obtenido a través de una desviación típica, y por tanto, con una probabilidad de cobertura, conocida, del 68%.
- El denominado como “error de puntería” se obtiene de forma empírica con un valor “máximo” (de probabilidad de cobertura no definida).
- El “error de dirección”, también de probabilidad de cobertura no definida, es uno de los que más le afecta al “error total”, ya que se evalúa también de forma “máxima”, al sumar el “error” de centrado del instrumento y el “error” de señal, siendo difícil, por tanto, reducir este “error total”. Además, ¿por qué no considerar estos valores de centrado del instrumento y señal como independientes en el caso de una medida angular horizontal cuando realmente lo son?

Así pues, esos “errores” que forman parte de esa componente cuadrática, tienen diferentes probabilidades de cobertura, haciendo que ese “error total” por dirección angular no quede bien definido. Queda claro, además, que se están denominando errores a lo que realmente no son.

En definitiva, con las expresiones convencionales utilizadas para evaluar estos denominados “errores accidentales” se están mezclando las probabilidades de cobertura de los mismos, resultando imposible conocer con qué probabilidad de cobertura se está determinando la incertidumbre de medida del propio mensurando. Esto es incompatible con la aplicación de la ley de propagación de las incertidumbres, la cual requiere aplicar rigurosamente la misma probabilidad de cobertura a las incertidumbres de todas las variables de partida, además de trabajar con desviaciones típicas, dejando los valores máximos (o incertidumbres expandidas a la probabilidad de cobertura que se desee) para los valores finales de la propagación. También es frecuente la utilización indistinta de los términos “precisión”, “exactitud” o “error”, asociándoles valores numéricos, cuando en realidad los dos primeros son conceptos cualitativos y el tercero sólo debería utilizarse si se está refiriendo a la diferencia respecto al valor real o de referencia. En suma, es necesaria una homogeneización en el tratamiento de todos estos aspectos.

Teniendo en cuenta este tratamiento, la evolución del instrumental topográfico y la existencia de normas internacionales, tanto para la evaluación de la incertidumbre de medida en general (ISO 2008, 2007), como para la de este tipo de instrumentos (ISO 2001a, 2001b, 2001c), se hace aconsejable una revisión en este ámbito.

Así pues, los objetivos de este artículo son, por un lado, realizar una revisión de las contribuciones a la incertidumbre que afectan a los mensurandos más frecuentes en Topografía: ángulos horizontales y verticales, distancias por métodos electromagnéticos y desniveles obtenidos mediante nivelación geométrica. Por otro lado, evaluar la incertidumbre de medida de los mismos (pasando del tradicional enfoque del “error” al enfoque de la “incertidumbre”) en concordancia con el instrumental más habitual en la actualidad (estaciones totales y niveles automáticos o digitales), y el empleo de normas internacionales para la evaluación de la incertidumbre de medida, homogeneizando la probabilidad de cobertura, al utilizar la desviación típica como medida de la incertidumbre típica de medida.

## 2. Incertidumbre de medida en ángulos horizontales y verticales

En esta sección se recogen las diversas fuentes de incertidumbre que afectan a la medida de un ángulo horizontal y vertical observado con estación total, se evalúa su incertidumbre de medida y se presenta un ejemplo de cálculo.

### 2.1. Fuentes de incertidumbre

Las diferentes fuentes de incertidumbre que afectan a la medición de un ángulo horizontal y vertical se pueden clasificar en instrumentales, personales y naturales (Buckner, 1991; Anderson y Mikhail, 1998; Wolf y Ghilani, 2008 y Schofield y Breach, 2006 entre otros):

- Instrumentales. Entre éstas se pueden considerar:
  - Falta de verticalidad del eje principal.
  - Falta de perpendicularidad entre los ejes de colimación y horizontal (secundario).
  - Falta de perpendicularidad entre los ejes horizontal y vertical (principal).
  - Índice del círculo vertical.
  - Falta de coincidencia entre la línea de puntería y el eje óptico.
  - Excentricidad.
  - Graduaciones imperfectas.
  - Falta de paralelismo entre el eje del anteojo y la línea de puntería.

Todas estas fuentes de incertidumbre, llamadas instrumentales, son errores sistemáticos residuales que provienen de la fase de fabricación del instrumento y son inevitables. Su influencia sobre las medidas realizadas se puede eliminar seleccionando métodos de medida adecuados (p. ej. tomando el promedio de una medida en círculo directo y otra en círculo inverso), o reducirla a un mínimo aplicando correcciones de calibración (Dzierzega y Scherrer, 2003a), por lo que la mayoría de las fuentes de incertidumbre de origen instrumental no se considerarán significativas para la evaluación de la incertidumbre de medida angular (Anderson y Mikhail, 1998).

Una mejora sustancial en el instrumental topográfico fue la inclusión de dispositivos de control de inclinación (compensadores). Estos dispositivos se utilizan para compensar automáticamente los ángulos horizontales y verticales de cualquier inclinación residual del eje vertical del teodolito aplicando correcciones directamente a las medidas efectuadas en un círculo. Gracias a estos compensadores, se elimina la necesidad de registrar medidas en ambas posiciones del anteojo (Kennie, 1996), salvo para las medidas más precisas. Los compensadores pueden ser de un eje, de doble y de triple eje. Los primeros, permiten corregir los ángulos verticales, los segundos corrigen, además, los ángulos horizontales, y los de triple eje, corrigen automáticamente la desviación del eje de colimación.

Tradicionalmente, el error de verticalidad era uno de los errores accidentales considerados a la hora de evaluar el error total de medida de un ángulo. En la actualidad, debido al uso casi exclusivo de estaciones totales, si el instrumento posee compensador de un eje, la influencia de la falta de verticalidad del eje principal para los ángulos verticales se puede considerar despreciable. En caso de disponer de compensador de doble eje (que es lo más habitual en los equipos actuales), también se puede despreciar su influencia para ángulos horizontales. En cualquier caso, para mediciones en trabajos de alta precisión, se podría tener en cuenta esta fuente de incertidumbre y evaluar su contribución a la incertidumbre de medida de un ángulo a partir de la desviación típica del compensador que ofrece el fabricante.

- Personales. Son consecuencia de la limitación del ojo humano durante el proceso de estacionamiento y nivelación del instru-

mento, así como a la hora de realizar las medidas. Por lo general, todas estas fuentes de incertidumbre tienen un efecto aleatorio sobre las medidas realizadas y, entre ellas, se pueden considerar:

- *Estacionamiento no exacto del instrumento sobre el punto de estación.* Produce un error en todos los ángulos medidos desde una estación. Su influencia depende del ángulo observado y de las distancias a las que se encuentran las señales observadas.
- *Centrado no exacto de la señal visada.* Es independiente del anterior, y produce un error en cada dirección medida desde una estación. Su influencia depende la distancia a la que se encuentre la señal observada.
- *Falta de verticalidad de la señal visada.* Normalmente, esta fuente de incertidumbre tiene mayor influencia en aquellas medidas en las que las punterías horizontales se realizan directamente al prisma o a la parte superior del jalón. El efecto sobre la dirección angular medida, es el mismo que el de no estacionar la señal exactamente sobre su punto de estación.
- *Lectura en micrómetros y fijación de ángulos en los teodolitos ópticos.* Para el caso de equipos electrónicos son función principalmente de la resolución de los círculos codificados horizontal y vertical, por lo que no se requiere mayor destreza por parte del operador.
- *Puntería.* Depende fundamentalmente de la longitud de la visual, del tipo de señal a la que se observa y de las condiciones ambientales en el momento de la observación. Los equipos dotados de dispositivos de reconocimiento automático de prisma (tipo ATR de Leica) ayudan a minimizar esta fuente de incertidumbre para distancias cortas, si bien a distancias largas, la puntería es función de la resolución angular del equipo.
- *Enfoque imperfecto (paralaje).*
- **Naturales.** Como fuentes de incertidumbre de este tipo se pueden considerar el asentamiento del trípode, la refracción atmosférica desigual tanto horizontal como vertical, la expansión desigual de partes del instrumento debido a cambios de temperatura, la humedad, la presión atmosférica, y el viento, el cual produce principalmente vibración en el equipo. Normalmente, estos efectos no son lo bastante grandes como para afectar de modo apreciable a las medidas realizadas en trabajos de precisión ordinaria. Sin embargo, se pueden producir grandes errores de medida con motivo del asentamiento del trípode cuando se estaciona sobre terreno blando o cuando la línea de puntería pasa cerca de fuentes de calor como chimeneas o fuego.

Para mediciones en trabajos de alta precisión, los métodos de observación son tales que las fuentes de incertidumbre de origen instrumental y personal se mantienen dentro de límites muy pequeños, siendo los de origen natural de gran importancia. Generalmente, los efectos naturales provocan errores aleatorios, pero bajo ciertas condiciones pueden producir errores sistemáticos. En este tipo de medidas, se utilizan procedimientos tales que en la medida de lo posible eliminen los errores sistemáticos naturales. Así pues, el instrumento se puede estacionar sobre pilar y proteger del sol y viento, o también se pueden realizar mediciones nocturnas cuando la temperatura y las condiciones atmosféricas son casi constantes.

Resumiendo todo lo anterior, en trabajos de precisión ordinaria con instrumentos dotados de doble compensador, las fuentes de incertidumbre que tendrán mayor influencia sobre la medida de un ángulo horizontal serán las de tipo personal: las procedentes de la lectura y puntería, las procedentes del centrado e inclinación de la señal visada, y del centrado del instrumento sobre el punto de estación. La norma ISO 17123-3 (ISO, 2001b) simplifica, de forma práctica, la evaluación de la incertidumbre de medida angular de un instrumento, al englobar en un único valor las contribuciones a la incertidumbre producidas por los denominados “errores de verticalidad, lectura y puntería”. En las siguientes secciones se estudiarán cada una de las contribuciones que influyen sobre la medida de un ángulo

horizontal por este orden: medida con el instrumento, centrado de la señal visada, inclinación de esta señal y centrado del instrumento.

### 2.1.1. Incertidumbre de medida angular del instrumento

La Norma ISO 17123-3 (ISO, 2001b) establece el procedimiento a seguir por un usuario para determinar y evaluar la incertidumbre de medida angular (repetibilidad) del instrumento utilizado. Aunque la calidad de la medida del instrumento depende de diversos factores como la incertidumbre del compensador, la resolución angular del instrumento, los aumentos del anteojo, etc., la Norma ISO 17123-3 no pretende estudiar cada uno de estos factores, sino conocer el efecto final producido por todos ellos, evaluando la desviación típica de la medida. Se trata de una forma muy práctica de evaluar la incertidumbre del equipo topográfico utilizado, del tipo “caja negra”. En otras palabras, no tienen interés para el usuario los distintos elementos del instrumento, sino la salida, o medida, que se consigue. Esto es aplicable también al resto de partes de la Norma ISO 17123.

Las distintas partes de la Norma 17123 describen los procedimientos de medida necesarios para evaluar la incertidumbre de medida de un instrumento topográfico-geodésico, y comprobar que está en perfectas condiciones de uso. Se trata de procedimientos para el chequeo en campo por el usuario (*Field procedures for testing geodetic and surveying instruments*). Estos test no deberían confundirse con una calibración de la instrumentación (Martin y Gatta, 2006). La calibración es la acción de chequear y ajustar, comparando con un estándar o referencia, la exactitud de un instrumento de medida. La calibración debe de llevarse a cabo en un laboratorio acreditado para ello, y realizarse, en condiciones normales, aproximadamente cada 1 ó 2 años, es decir, con menos frecuencia que el chequeo del instrumento por el usuario (field test). A este respecto, Staiger (2004) propone realizar un control periódico de la instrumentación cada seis meses, y en cualquier caso, antes y después de realizar observaciones de precisión, tras un largo período de inactividad y después de un largo transporte. Conviene realizar este control periódico ya que por distintas causas el instrumento puede no funcionar correctamente proporcionando medidas erróneas.

Usualmente los fabricantes siguen esta norma para indicar la incertidumbre de medida de sus equipos, pero es importante resaltar que el procedimiento lo realizan en laboratorio, en unas condiciones óptimas, dando lugar a incertidumbres menores que las que se pueden obtener en campo bajo otras condiciones ambientales diferentes (condiciones de reproducibilidad). No obstante, es el usuario el que debe chequear su equipo en campo, en una o varias condiciones habituales de utilización, para conocer los valores de incertidumbre reales del mismo (incertidumbre de tipo A, ISO (2008), CEM (2000), Howarth y Redgrave (2008)). A este respecto, y debido, entre otros, a las limitaciones de tiempo y espacio en las grandes ciudades para poder aplicar rigurosamente este procedimiento ISO 17123 en campo, Dzierzega y Scherrer (2003b) proponen un método compacto para el chequeo en laboratorio de estaciones totales. En cualquier caso, a falta de un control realizado por el usuario, se tomará la desviación típica de lectura angular indicada por el fabricante (incertidumbre de tipo B, ISO (2008), CEM (2000), Howarth y Redgrave (2008)).

Según la Norma ISO 17123-3, la incertidumbre típica de medida angular horizontal y vertical con un teodolito se expresa mediante la desviación típica experimental de la media de una dirección angular horizontal ( $\sigma_{\text{ISO-HZ}}$ ) observada una vez en ambas posiciones del anteojo (círculo directo y círculo inverso), y de la media de un ángulo vertical ( $\sigma_{\text{ISO-V}}$ ) medido también una vez en ambas posiciones del anteojo. Por tanto, para una determinada dirección angular, la desviación típica de la medida angular realizada en uno de los círculos (es decir, sin efectuar una media de las dos posiciones), que engloba a los tradicionales “errores accidentales de lectura y puntería”, será:

$$\sigma_{\text{HZ}} = \pm \sigma_{\text{ISO-HZ}} \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sigma_{\text{V}} = \pm \sigma_{\text{ISO-V}} \sqrt{2} \quad (2)$$

Si las lecturas angulares (horizontales o verticales) se realizan *n* veces, esta desviación típica ( $\sigma_{\text{HZ}}$  o  $\sigma_{\text{V}}$ ) vendrá dividida por la raíz de

n. Así pues, la contribución de la incertidumbre típica de medida angular del instrumento  $\sigma_{a_{ISO}}$  a la incertidumbre de medida de un ángulo horizontal  $\alpha$  medido  $n$  veces será:

$$\sigma_{a_{ISO}} = \pm \frac{\sigma_{HZ} \sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \pm \frac{\sigma_{ISO-HZ} \sqrt{2} \sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2\sigma_{ISO-HZ}}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

**2.1.2. Incertidumbre por centrado de la señal visada**

Al situar la señal visada (p. ej. un jalón) sobre el punto al que se desea visar, se cometerá un determinado error aleatorio de carácter circular  $e_o$ , el cual da lugar a una fuente de incertidumbre que afectará a la incertidumbre de medida de un ángulo horizontal, y cuya contribución hay que evaluar. Si este error de centrado se cometiera en la dirección de la visual (véase figura 1), su efecto sobre la dirección angular observada sería nulo. En cambio, si se produce en dirección perpendicular a la visual, su efecto será máximo. El valor máximo asumido para  $e_o$  habría de ser considerado como una incertidumbre expandida  $U_o$  con una determinada probabilidad de cobertura. En lo sucesivo se utilizará el 99,7% como la probabilidad de cobertura correspondiente a una incertidumbre expandida considerada como un valor máximo (Mikhail y Gracie, 1981; Ghilani y Wolf, 2006; Uotila, 1973; véase apéndice 2). Supuesta una distribución normal circular para el error de centrado de la señal, la incertidumbre expandida a esa probabilidad de cobertura correspondería a un valor de  $3,5\sigma$  (véase apéndice 2).

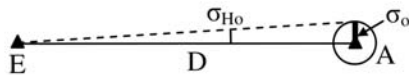


Figura 1. Incertidumbre típica  $\sigma_{Ho}$  para una dirección angular como consecuencia de una incertidumbre típica  $\sigma_o$  en el centrado de la señal visada.

Puesto que con la filosofía de la incertidumbre hay que trabajar con desviaciones típicas, la incertidumbre expandida, asumida con valor igual a  $e_o$ , se dividirá por 3,5 para obtener la correspondiente incertidumbre típica  $\sigma_o$ . Así pues,  $\sigma_o$  corresponderá a la incertidumbre típica en el centrado de la señal visada, la cual está presente en cada dirección observada y no puede reducirse su valor realizando múltiples punterías (a no ser que la señal se coloque y quite de su punto de estación para cada puntería, lo cual no es lo habitual). Así pues, no puede reducirse su valor dividiendo por la raíz del número de veces que se observa la correspondiente dirección angular. Los valores que pueden asumirse para  $\sigma_o$  en distintas situaciones pueden encontrarse en el apéndice 3.

Por tanto, la incertidumbre de una dirección angular tendrá una contribución, debida a la incertidumbre típica  $\sigma_o$  del centrado de la señal visada, cuyo valor  $\sigma_{Ho}$  será (Ghilani y Wolf, 2006, véase figura 1):

$$\sigma_{Ho} = \pm \frac{\sigma_o}{D} r^{cc} \quad (4)$$

siendo  $D$  la distancia que separa el punto de estación  $E$  de la señal visada  $A$ .

Para el caso de la observación de un ángulo horizontal  $\alpha$  medido entre dos puntos  $A$  y  $B$ , al visarse dos direcciones, la incertidumbre de centrado de la señal visada, independiente para cada punto visado, contribuirá a la incertidumbre del ángulo horizontal medido, con una incertidumbre típica  $\sigma_{\alpha_o}$  de (véase figura 2):

$$\sigma_{\alpha_o} = \pm \sqrt{\sigma_{Ho_A}^2 + \sigma_{Ho_B}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{o_A}}{D_E^A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{o_B}}{D_E^B}\right)^2} r^{cc} \quad (5)$$

Si se considera la misma incertidumbre típica  $\sigma_o$  en el centrado de cada marca visada, la expresión [5] se reduce a:

$$\sigma_{\alpha_o} = \pm \frac{\sqrt{(D_E^A)^2 + (D_E^B)^2}}{D_E^A D_E^B} \sigma_o r^{cc} \quad (6)$$

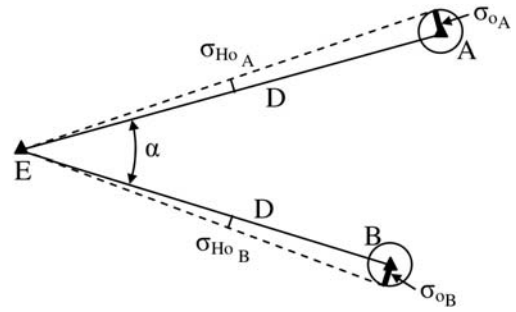


Figura 2. Incertidumbre típica  $\sigma_{Ho}$  en dos direcciones angulares como consecuencia de una incertidumbre típica  $\sigma_o$  en el centrado de las señales visadas.

**2.1.3. Incertidumbre por inclinación de la señal visada**

Con frecuencia, en las observaciones angulares realizadas en campo, sólo es visible la parte superior de jalón, o incluso solamente el prisma, estando sujeto el jalón con la mano por el operador auxiliar, y mantenido vertical con la ayuda de un nivel esférico acoplado al mismo. En tal caso, si el jalón estuviera inclinado un determinado ángulo  $\beta$  respecto de su posición vertical (véase apéndice 4), provocaría un determinado error aleatorio planimétrico  $e_j$ , de carácter circular (véase figura 3), el cual da lugar a una fuente de incertidumbre que afecta a la incertidumbre de medida de un ángulo horizontal, y cuyo valor se ha de evaluar. El valor máximo asumido para  $e_j$  se considerará como la incertidumbre expandida ( $U_j$ ) a  $3,5\sigma$  (probabilidad de cobertura del 99,7%). Dividiendo  $U_j$  por 3,5 se obtendrá  $\sigma_j$ , que será la incertidumbre típica planimétrica por la inclinación de la señal visada.

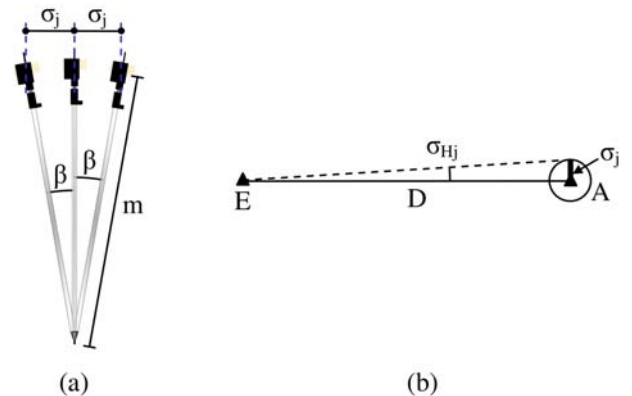


Figura 3. (a) Incertidumbre típica planimétrica  $\sigma_j$  por inclinación del jalón un ángulo  $\beta$  sobre la vertical. (b) Incertidumbre típica  $\sigma_{Hj}$  para una dirección angular como consecuencia de esta incertidumbre  $\sigma_j$ .

Es importante destacar que esta incertidumbre típica  $\sigma_j$  es independiente de la del centrado  $\sigma_o$  de la señal sobre el punto correspondiente. Contribuirá a la incertidumbre de medida de una determinada dirección angular con una incertidumbre típica  $\sigma_{Hj}$  de (véase figura 3):

$$\sigma_{Hj} = \pm \frac{\sigma_j}{D} r^{cc} \quad (7)$$

Para el caso de un ángulo horizontal  $\alpha$  medido entre dos puntos  $A$  y  $B$ , al ser la incertidumbre por inclinación de la señal visada independiente para cada uno, la contribución  $\sigma_{\alpha_j}$  a la incertidumbre típica del ángulo será:

$$\sigma_{\alpha_j} = \pm \sqrt{\sigma_{Hj_A}^2 + \sigma_{Hj_B}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{j_A}}{D_E^A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{j_B}}{D_E^B}\right)^2} r^{cc} \quad (8)$$

Si en los dos puntos observados  $A$  y  $B$  se considera la misma incertidumbre típica  $\sigma_j$ ,  $\sigma_{\alpha_j}$  quedará:

$$\sigma_{\alpha_j} = \pm \frac{\sqrt{(D_E^A)^2 + (D_E^B)^2}}{D_E^A D_E^B} \sigma_j r^{cc} \tag{9}$$

La incertidumbre expandida  $U_j$  (probabilidad de cobertura del 99,7%) por inclinación de la señal visada se puede evaluar (véase figura 3a) mediante:

$$U_j = m \text{sen}(\text{máx } \beta) \cong m (\text{máx } \beta^{\text{rad}}) \tag{10}$$

siendo  $m$  la distancia desde el centro del prisma hasta la punta del jalón.

Si durante el tiempo que se visa al prisma, cuando se mide un ángulo horizontal o una dirección angular  $n$  veces para efectuar un promedio, el jalón se mantiene vertical sujetándolo con la mano y auxiliándose de un nivel esférico acoplado al mismo, el error  $e_j$  se puede considerar como aleatorio, y por tanto, la incertidumbre típica  $\sigma_{Hj}$  se reducirá dividiéndola por raíz de  $n$  ya que al visar cada vez al prisma, el jalón podría tener una inclinación diferente debido, entre otros, al pulso del operador que lo sujeta. Así pues,  $U_j$  vendrá dado por:

$$U_j = \frac{m \text{sen}(\text{máx } \beta)}{\sqrt{n}} \cong \frac{m (\text{máx } \beta^{\text{rad}})}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

Si el jalón con nivel esférico acoplado se mantuviese vertical con la ayuda de un trípode de pinza, bípode o se acopla el prisma a una plataforma nivelante y se sitúa sobre trípode, este error  $e_j$  actuaría como sistemático, ya que el prisma siempre quedaría situado en la misma posición, y por tanto, por muchas veces que se visara, esta incertidumbre no se reduciría. En tal caso, dada su pequeña cuantía (véase apéndice 4), este error por falta de verticalidad se podría considerar despreciable, y por ende, la contribución  $\sigma_{Hj}$  a la incertidumbre de medida de una dirección angular (o todo el término  $\sigma_{\alpha_j}$  si el error es despreciable para las dos direcciones del ángulo).

**2.1.4. Incertidumbre por centrado del instrumento sobre el punto de estación**

Al estacionar el instrumento sobre su punto de estación se cometerá un error aleatorio de carácter circular  $e_c$ , el cual provoca un efecto importante en el ángulo horizontal medido cuando la longitud de la visual es pequeña. No tiene influencia en cambio para los ángulos verticales. En la actualidad, gracias al empleo de plomadas ópticas y láser (convenientemente calibradas) y de señales con algún tipo de marca especial sobre las que estacionar el equipo, este error llega a ser de una magnitud muy pequeña, pudiendo conseguirse exactitudes del orden del milímetro o mejores en el centrado del equipo sobre el punto de estación. Los valores que pueden asumirse para  $e_c$  en distintas situaciones pueden encontrarse en el apéndice 3. Este error  $e_c$  da lugar a una fuente de incertidumbre que afectará a la incertidumbre de medida de un ángulo horizontal y cuya contribución hay que cuantificar.

El efecto sobre los ángulos horizontales medidos podría ser nulo si el instrumento se estacionara sobre el arco capaz del ángulo a medir

(véase figura 4a) o bien ser máximo cuando el instrumento se situara sobre la bisectriz del mismo (véase figuras 4b y 4c).

Mikhail y Gracie (1981), Buckner (1991) y Ghilani y Wolf (2006), entre otros, aplican la ley de propagación de las incertidumbres para obtener la siguiente expresión que cuantifica la correspondiente contribución de la incertidumbre típica de estacionamiento del instrumento  $\sigma_{\alpha_c}$  a la incertidumbre de medida de un ángulo horizontal:

$$\sigma_{\alpha_c} = \pm \frac{\sqrt{(D_E^A)^2 + (D_E^B)^2 - 2 D_E^A D_E^B \cos \alpha}}{D_E^A D_E^B} \sigma_c r^{cc} = \pm \frac{D_A^B}{D_E^A D_E^B} \sigma_c r^{cc} \tag{12}$$

donde  $\sigma_c$  es la incertidumbre típica del centrado del instrumento sobre el punto de estación.

Ésta tiene carácter circular, y por tanto, su valor es el mismo en cualquier dirección (incluyendo obviamente los ejes X e Y de un sistema rectangular de coordenadas, esto es,  $\sigma_c = \sigma_{c-x} = \sigma_{c-y}$ , véase Greenwalt y Shultz, 1962). Se obtiene a partir de un valor máximo del error de centrado  $e_c$ , que es considerado como la incertidumbre expandida  $U_c$ . Supuesta una distribución normal circular para el error de centrado del instrumento y una probabilidad de cobertura del 99,7%, la incertidumbre expandida correspondería a un valor de  $3,5\sigma$  (véase apéndice 2).

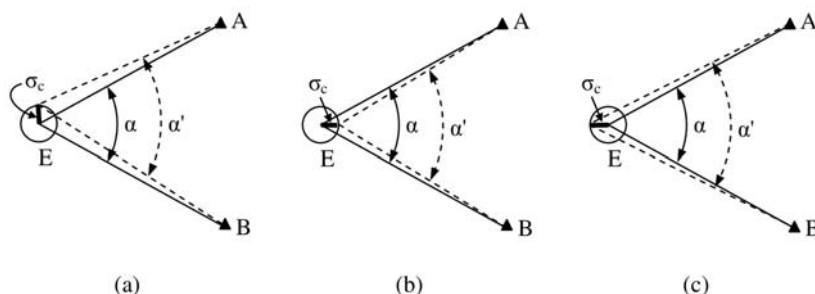
$$\sigma_c = \sigma_{c-x} = \sigma_{c-y} = \frac{U_c}{3,5} \tag{13}$$

La contribución por centrado del instrumento  $\sigma_{\alpha_c}$  a la incertidumbre típica de medida de un ángulo horizontal no se reduce realizando múltiples punterías, al igual que le ocurre a la contribución  $\sigma_{\alpha_o}$  por centrado de las señales visadas, por lo que no puede dividirse por la raíz del número de veces que se mide el ángulo. Obsérvese que se trata de una incertidumbre que depende del ángulo  $\alpha$ , alcanzando el mayor valor para un ángulo de  $200^\circ$  y decreciendo progresivamente hasta alcanzar un valor nulo cuando  $\alpha = 0^\circ$  o  $\alpha = 400^\circ$ .

**2.2. Incertidumbre típica combinada de medida de un ángulo horizontal**

La incertidumbre típica combinada de medida de un ángulo horizontal  $\sigma_\alpha$  se obtiene finalmente aplicando la ley de propagación de las incertidumbres a las contribuciones evaluadas por la incertidumbre de medida del instrumento  $\sigma_{\alpha_{iso}}$  [3], por el centrado de las señales visadas  $\sigma_{\alpha_o}$  [5] ó [6], por el centrado del instrumento  $\sigma_{\alpha_c}$  [12] y por la inclinación de las señales visadas  $\sigma_{\alpha_j}$  [8] ó [9]. Como no hay correlaciones entre estas fuentes de incertidumbre, se aplica la siguiente expresión:

$$\sigma_\alpha = \pm \sqrt{\sigma_{\alpha_{iso}}^2 + \sigma_{\alpha_o}^2 + \sigma_{\alpha_c}^2 + \sigma_{\alpha_j}^2} \tag{14}$$



**Figura 4.** Efecto sobre un ángulo horizontal de la incertidumbre típica por centrado del instrumento  $\sigma_c$ . En el primer caso (a) no afecta al ángulo, mostrándose su efecto máximo en los casos (b) y (c).

### 2.3. Incertidumbre típica de medida de un ángulo vertical

A la medida de un ángulo vertical le afectará sólo la incertidumbre de medida angular del equipo ( $\sigma_{ISO-V}$ ), ya que ni el centrado de la señal visada, ni el del instrumento, tendrán una influencia significativa. La contribución de la falta de verticalidad del jalón también se considerará despreciable, ya que sólo sería destacable si éste se inclinara una cantidad importante, la distancia de observación fuera muy pequeña y la visual tuviese una pendiente elevada. Si el instrumento lleva compensador, tal y como se estipuló anteriormente (sección 2.1), la contribución a la incertidumbre de medida de un ángulo vertical por el denominado “error de verticalidad” del instrumento se puede considerar despreciable para los trabajos más usuales de Topografía. En cualquier caso, al igual que se estipuló para un ángulo horizontal, el espíritu de la Norma ISO 17123-3 es incluir las fuentes de incertidumbre debidas a la verticalidad del equipo, lectura y puntería en un único valor de desviación típica  $\sigma_{ISO-V}$ . Así pues, para un ángulo vertical  $V$ , medido  $n$  veces, su incertidumbre típica de medida  $\sigma_V$  será:

$$\sigma_V = \pm \frac{\sigma_{ISO-V} \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

### 2.4. Ejemplo práctico de cálculo

Supóngase la utilización de una estación total con una incertidumbre típica de medida  $\sigma_{ISO-HZ} = 10^{cc}$  que se ha estacionado sobre el punto E utilizando plomada óptica. Se ha empleado para medir un ángulo horizontal entre los puntos A y B, en los cuales se ha colocado un jalón con prisma y nivel esférico acoplado, que se ha mantenido vertical sujetándolo con la mano. Considérese como incertidumbre expandida (probabilidad de cobertura del 99,7%) de centrado del instrumento  $U_c = 0,001$  m, como incertidumbre expandida de centrado del jalón  $U_o = 0,002$  m, tanto en A como en B, y como máxima inclinación del jalón un valor de  $\beta = 20^\circ$ . Quiere evaluarse la incertidumbre típica de medida del ángulo horizontal medido, cuyo valor es de  $75^s$ , sabiendo que se ha aplicado la regla de Bessel (CD y CI), que se ha hecho la puntería al centro del prisma, a 1,3 m de altura, y que los prismas distan de la estación 100 y 200 m, respectivamente.

Utilizando la expresión [14], la incertidumbre típica combinada de un ángulo se puede evaluar como:

$$\sigma_\alpha = \pm \sqrt{\sigma_{a_{ISO}}^2 + \sigma_{a_o}^2 + \sigma_{a_c}^2 + \sigma_{a_j}^2} = \pm 18^{cc}$$

donde cada una de las contribuciones a esta incertidumbre son:

- Contribución  $\sigma_{a_{ISO}}$  por parte de la incertidumbre de medida de la estación total [3]:

$$\sigma_{a_{ISO}} = \pm \frac{2 \sigma_{ISO-HZ}}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2 \cdot 10^{cc}}{\sqrt{2}} = \pm 14,1^{cc}$$

- Contribución  $\sigma_{a_o}$  por el centrado del jalón, que se considera de igual valor en A que en B [6]:

$$\sigma_{a_o} = \pm \frac{\sqrt{(D_E^A)^2 + (D_E^B)^2}}{D_E^A D_E^B} \sigma_o r^{cc} = \pm \frac{\sqrt{100^2 + 200^2}}{100 \cdot 200} \frac{0,002}{3,5} r^{cc} = \pm 4^{cc}$$

- Contribución  $\sigma_{a_c}$  por el centrado del instrumento [12] y [13]:

$$\sigma_{a_c} = \pm \frac{\sqrt{(D_E^A)^2 + (D_E^B)^2 - 2 D_E^A D_E^B \cos \alpha}}{D_E^A D_E^B} \sigma_c r^{cc} =$$

$$= \pm \frac{D_A^B}{D_E^A D_E^B} \sigma_c r^{cc} = \pm \frac{186,260}{100 \cdot 200} \frac{0,001}{3,5} r^{cc} = \pm 1,7^{cc}$$

- La máxima inclinación del jalón provoca una incertidumbre típica planimétrica  $\sigma_j$  de [11]:

$$\sigma_j = \frac{m(\max \beta^{rad})}{3,5 \sqrt{n}} = \frac{1,3 \cdot 20 \cdot 60}{206265 \cdot 3,5 \sqrt{2}} = 0,0015 \text{ m}$$

y su contribución  $\sigma_{a_j}$  a la incertidumbre típica del ángulo será [9]:

$$\sigma_{a_j} = \pm \frac{\sqrt{(D_E^A)^2 + (D_E^B)^2}}{D_E^A D_E^B} \sigma_j r^{cc} = \pm \frac{\sqrt{100^2 + 200^2}}{100 \cdot 200} 0,0015 r^{cc} = \pm 10,8^{cc}$$

Es importante destacar la poca influencia sobre la incertidumbre típica de medida del ángulo horizontal, para este caso, del centrado del instrumento y los jalones para las longitudes de las visuales consideradas. El valor de la incertidumbre típica obtenida para el ángulo medido podría haberse reducido actuando sobre la incertidumbre de medida angular del equipo y sobre la verticalidad del jalón. En el primer caso, aumentando el número de medidas ( $n > 2$ ), y en el segundo caso, habiendo realizado la puntería a la punta del jalón o habiéndolo mantenido vertical con la ayuda de un trípode de pinza o un bípode (véase [apéndice 4](#)).

## 3. Incertidumbre de medida en distancias por métodos electromagnéticos

En esta sección se recogen las diversas fuentes de incertidumbre que afectan a la medida de una distancia geométrica con estación total o distanciómetro, se evalúa su incertidumbre de medida y se presenta un ejemplo de cálculo.

### 3.1. Fuentes de incertidumbre

Como fuentes de incertidumbre en distancimetría electrónica se pueden considerar las instrumentales, personales y naturales (Wolf y Ghilani, 2008; Kennie, 1996, entre otros):

- **Instrumentales.** Los efectos de este tipo de fuentes de incertidumbre se consideran muy pequeños si el instrumento está en perfecto estado de ajuste y calibración. Éstas se pueden considerar como provenientes de los siguientes errores:
  - *Errores de escala.* Se producen si la frecuencia de modulación del distanciómetro no se corresponde exactamente con el valor diseñado para el mismo. El error es proporcional a la distancia medida y se suele expresar en partes por millón (ppm) de la distancia. Idealmente, sería despreciable ( $< 1$  ppm), pero sin embargo, podría llegar a valores de 20-30 ppm en casos extremos.
  - *Error de cero.* También llamado error de constante aditiva, error de índice, constante de prisma/reflector o constante de equipo. Representa la diferencia entre la distancia medida con distanciómetro entre dos puntos (corregida por errores de escala, cíclicos y atmosféricos) y la distancia conocida entre ellos. El punto desde el cual se considera que se transmite la señal, el centro electrónico, podría diferir del centro geométrico considerado como el eje principal que pasa por el punto de estación. Además, podría haber una discrepancia entre los centros geométricos y ópticos de los reflectores. El error de cero, característico para cada instrumento y prisma, es un error sistemático de magnitud constante y no proporcional a la distancia medida. Normalmente, todos los pris-

mas del mismo modelo usados para un distanciómetro determinado suelen venir calibrados por el fabricante ofreciendo diferencias despreciables, en cuanto a este error, entre unos y otros. No obstante, en cualquier caso, el valor de esta constante debe calibrarse para el reflector que normalmente se use, y en especial, para su utilización en estudios de deformación (Bannister y otros, 1998).

- **Errores cíclicos.** Son periódicos y pueden tener un efecto sistemático particularmente a pequeñas distancias. Generalmente son más pequeños que los dos anteriores y se deben a la contaminación electrónica interna entre los circuitos de transmisión y recepción.

Todos estos errores pueden reducirse aplicando un método de calibración adecuado. Los métodos más sofisticados, y por tanto de mayor exactitud, son los empleados en laboratorio o en líneas base de calibración permanentes (de longitud conocida). Con estos, se pueden determinar los errores de escala y cíclicos (Rüeger, 1996; Burnside, 1982; Schofield y Breach, 2006). Los métodos más simples son los que se pueden aplicar directamente por el usuario sobre el terreno. Entre ellos, dos técnicas que se basan en el uso de una línea base de longitud no conocida son el método de los tres puntos (Dodson, 1978) y el de Schwendener (1972). Éste último emplea una línea base de siete puntos (seis secciones), tomando un total de 21 medidas de distancia para determinar tanto la desviación típica de una distancia individual como el error de cero. Ambos métodos permiten conocer de forma bastante aproximada el error de cero, siendo el método de Schwendener similar al propuesto por la norma ISO 17123-4 (ISO, 2001c).

- **Personales.** Entre estos se pueden considerar:
  - *Estacionamiento no exacto del instrumento sobre el punto de estación.* Para observaciones sensiblemente horizontales, su influencia es directa en la distancia medida entre la estación y el punto observado.
  - *Centrado no exacto de la señal visada.* Su comportamiento es similar al anterior.
  - *Falta de verticalidad de la señal visada.* En el caso de la utilización de prismas sobre jalones, el efecto de la inclinación es similar a los casos anteriores.
  - *Errores en la determinación e introducción de parámetros atmosféricos.* Para aquellos instrumentos que permiten introducir directamente los valores de las variables atmosféricas (presión atmosférica, temperatura y humedad relativa) y otras correcciones.

Todos estos errores son aleatorios y se pueden minimizar realizando las medidas con el máximo cuidado y utilizando termómetros, barómetros e higrómetros de buena calidad.

- **Naturales.** Este tipo de fuentes de incertidumbre, en distanciómetría, provienen principalmente de las variaciones atmosféricas en la temperatura, presión y humedad que afectan al índice de refracción y modifican la longitud de onda de la energía electromagnética.

Las estaciones totales modernas llevan incorporados sensores que registran automáticamente el valor de estas variables atmosféricas en la estación, proporcionando las distancias ya corregidas por los factores meteorológicos. En otros equipos hay que introducir el valor de estas variables mediante el correspondiente teclado para que el procesador de la estación calcule el valor de las partes por millón (ppm) a corregir la distancia. En equipos más antiguos hay que introducir directamente las ppm, que habrán sido previamente determinadas por el usuario.

Conviene que la línea de puntería entre la estación y el prisma no pase rasante sobre el terreno sino que esté como mínimo a 0,5 m sobre el suelo, así como evitar también el pasar rasante al

agua u otros objetos que puedan alterar sustancialmente el índice de refracción de las capas atmosféricas.

Resumiendo todo lo anterior, en trabajos de precisión ordinaria, cuando se evalúa la incertidumbre típica de medida  $\sigma_{Dg}$  de la distancia geométrica medida con un distanciómetro, las principales contribuciones a la incertidumbre son las producidas por la incertidumbre de medida del equipo, por el centrado e inclinación de la señal visada, así como por el centrado del instrumento, los cuales se estudiarán en las siguientes secciones.

### 3.1.1. Incertidumbre de medida de la distancia por el distanciómetro

La Norma ISO 17123-4 (ISO, 2001c) establece el procedimiento a seguir para determinar y evaluar la incertidumbre de medida de un distanciómetro. Según esta norma, se puede llevar a cabo un procedimiento simplificado o completo, según las necesidades del usuario. Esta norma cuantifica la incertidumbre mediante la desviación típica experimental  $\sigma_{ISO-EDM}$  de una distancia medida con distanciómetro.

Al igual que ocurre con las medidas angulares (ISO 17123-3), la evaluación de la incertidumbre de medida del instrumento realizada por el fabricante en laboratorio se realiza bajo unas condiciones muy concretas, y por tanto, ofrece incertidumbres menores que las que se pueden obtener con las condiciones habituales en campo. Es el usuario el que debe evaluar la incertidumbre de medida de su equipo en una o varias condiciones habituales de utilización, y a diferentes distancias, para conocer los valores de incertidumbre reales del equipo (incertidumbre de tipo A, ISO (2008), CEM (2000), Howarth y Redgrave (2008)). No obstante, a falta de una evaluación realizada por el usuario, se tomará la desviación típica indicada por el fabricante (incertidumbre de tipo B, ISO (2008), CEM (2000), Howarth y Redgrave (2008)).

Esta desviación típica  $\sigma_{ISO-EDM}$  vendrá dada por un determinado valor constante si se aplica la norma ISO 17123-4 por un determinado usuario. Los fabricantes suelen presentar la incertidumbre de sus equipos mediante una parte constante más una parte proporcional a la distancia medida,  $\pm(a \text{ mm} + b \text{ ppm} \cdot D)$ , que es una forma de indicar la desviación típica para cualquier distancia. Si se utiliza la evaluación realizada por el fabricante, aplicando adecuadamente la propagación de incertidumbres, la incertidumbre típica de medida  $\sigma_{ISO-EDM}$  obtenida al medir una determinada distancia D, se puede evaluar mediante (Rüeger, 1996; Fialovszky y Holéczy, 1991; Laurila, 1983; Bannister y otros, 1998, entre otros):

$$\sigma_{ISO-EDM} = \pm \sqrt{a^2 + (b \text{ ppm} \cdot 10^{-6} D)^2} \quad (16)$$

Si la distancia D se mide n veces, esta incertidumbre típica de medida se reducirá obteniendo:

$$\sigma_{ISO-EDM} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + (b \text{ ppm} \cdot 10^{-6} D)^2}}{\sqrt{n}} \quad (17)$$

### 3.1.2. Incertidumbre por centrado de la señal visada

Se trata de la misma fuente de incertidumbre de la sección 2.1.2, la cual afectará en este caso, a la incertidumbre de medida de la distancia. El valor máximo asumido para  $e_0$  se considerará como la incertidumbre expandida  $U_0$ , con una determinada probabilidad de cobertura. Supuesta una distribución normal circular para el error de centrado de la señal y una probabilidad de cobertura del 99,7%, la incertidumbre expandida  $U_0$  correspondería a un valor de  $3,5\sigma_0$ . Por tanto, la incertidumbre típica del centrado de la señal visada  $\sigma_0$  será:

$$\sigma_0 = \frac{U_0}{3,5} \quad (18)$$

### 3.1.3. Incertidumbre por inclinación del prisma

Si el prisma se coloca sobre un jalón, la falta de verticalidad del jalón produce otra fuente de incertidumbre que afecta directamente a la distancia medida (sección 2.1.3, [figura 3](#) y [apéndice 4](#)). El valor máximo asumido para  $e_j$  se considerará como la incertidumbre expandida ( $U_j$ ) de  $e_j$  a  $3,5\sigma$  (probabilidad de cobertura del 99,7%). Dividiendo este valor por 3,5 se obtendrá  $\sigma_j$ , que será la incertidumbre típica planimétrica por la inclinación de la señal visada:

$$\sigma_j = \frac{U_j}{3,5} \quad (19)$$

También sería de aplicación lo comentado en la sección 2.1.3 sobre el mantenimiento de la señal en posición vertical de forma manual o mediante la utilización de equipo auxiliar (trípode de pinza, bípode o plataforma nivelante).

### 3.1.4. Incertidumbre por centrado del instrumento sobre el punto de estación

El mismo error  $e_c$  tratado en la sección 2.1.4 da lugar a una fuente de incertidumbre que afectará a la incertidumbre de medida de la distancia. La contribución correspondiente viene dada por la incertidumbre típica  $\sigma_c$  [ecuación 17]:

$$\sigma_c = \frac{U_c}{3,5} \quad (20)$$

## 3.2. Incertidumbre típica combinada de medida de una distancia geométrica por métodos electromagnéticos

La incertidumbre típica combinada de medida de una distancia geométrica medida con un distanciómetro  $\sigma_{Dg}$  se obtiene finalmente aplicando la ley de propagación de las incertidumbres a las contribuciones evaluadas por la incertidumbre de medida del equipo  $\sigma_{ISO-EDM}$  [17], por el centrado de la señal visada  $\sigma_o$  [18], por el centrado del instrumento  $\sigma_c$  [20] y por la inclinación del prisma  $\sigma_j$  [19]. Como no hay correlaciones entre estas incertidumbres, se aplica la siguiente expresión:

$$\sigma_{Dg} = \pm \sqrt{\sigma_{ISO-EDM}^2 + \sigma_o^2 + \sigma_c^2 + \sigma_j^2} \quad (21)$$

### 3.3. Ejemplo práctico de cálculo

Supóngase que se ha medido dos veces una distancia de 1000 m con un distanciómetro de incertidumbre típica  $\sigma_{ISO-EDM} = \pm (3 \text{ mm} + 3 \text{ ppm})$ . Considerando como incertidumbre expandida (probabilidad de cobertura del 99,7%) de centrado del instrumento  $U_c = 0,002 \text{ m}$ , incertidumbre expandida de centrado del jalón  $U_o = 0,002 \text{ m}$ , máxima inclinación del jalón de  $\beta = 23^\circ$  así como una altura de prisma  $m = 1,3 \text{ m}$ , se desea evaluar la incertidumbre típica de medida de la distancia promedio medida. El jalón se ha mantenido vertical sujetándolo con la mano y utilizando un nivel esférico convencional adosado al mismo.

Utilizando la expresión [21] se tiene que la incertidumbre típica combinada de la distancia medida es de:

$$\sigma_{Dg} = \pm \sqrt{\sigma_{ISO-EDM}^2 + \sigma_o^2 + \sigma_c^2 + \sigma_j^2} = \pm 0,004 \text{ m}$$

donde las contribuciones a esta incertidumbre típica son:

- Contribución por parte de la incertidumbre de medida del distanciómetro [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ISO-EDM} &= \pm \frac{\sqrt{a^2 + (b \text{ ppm} \cdot 10^{-6} D)^2}}{\sqrt{n}} = \\ &= \pm \frac{\sqrt{0,003^2 + (3 \text{ ppm} \cdot 10^{-6} \cdot 1000)^2}}{\sqrt{2}} = \pm 0,003 \text{ m} \end{aligned}$$

- Contribución por parte del centrado del jalón [18]:

$$\sigma_o = \frac{U_o}{3,5} = \frac{0,002}{3,5} = 0,0006 \text{ m}$$

- Contribución por parte del centrado del instrumento [20]:

$$\sigma_c = \frac{U_c}{3,5} = \frac{0,002}{3,5} = 0,0006 \text{ m}$$

- Contribución por parte de la inclinación del jalón utilizado [11 y 19]:

$$\sigma_j = \frac{U_j}{3,5} = \frac{m(\text{máx } \beta)}{3,5\sqrt{n}} = \frac{1,3 \cdot 23 \cdot 60}{3,5 \cdot 206265 \sqrt{2}} = 0,0018 \text{ m}$$

El valor de la incertidumbre típica de medida obtenido para la distancia podría haberse reducido actuando sobre la incertidumbre de medida del equipo y sobre la verticalidad del jalón. En el primer caso, aumentando el número de medidas ( $n > 2$ ), y en el segundo caso habiendo mantenido vertical el jalón con la ayuda de un trípode de pinza o un bípode (véase [apéndice 4](#)).

## 4. Incertidumbre de medida en desniveles geométricos

En esta sección se recogen las diversas fuentes de incertidumbre que afectan a la medida de un desnivel geométrico con un nivel, se evalúa su incertidumbre de medida y se presenta un ejemplo de cálculo.

### 4.1. Fuentes de incertidumbre

Para la nivelación geométrica se pueden considerar diversas fuentes de incertidumbre de origen instrumental, natural y personal (véase para mayor detalle, entre otros, [Wolf y Ghilani, 2008](#); [Anderson y Mikhail, 1998](#) y [Schofield y Breach, 2006](#)):

- Instrumentales:
  - *Horizontalidad de la línea de puntería.* Ésta se consigue mediante el correspondiente nivel tubular o esférico en los niveles de línea o mediante el compensador en los automáticos. Si el nivel presenta un error de colimación residual se puede cancelar igualando las distancias a la mira de espalda y de frente. Si éstas no son iguales, se puede aplicar la correspondiente corrección de colimación.
  - *Horizontalidad del hilo del retículo.* Se puede eliminar o minimizar leyendo en la mira cerca del centro del retículo.
  - *Longitud y graduación incorrecta de la mira.* Éstas deben estar debidamente contrastadas con patrones de calibración.
  - *Inestabilidad del trípode.* Los tornillos y las patas del trípode deben estar en buen estado para evitar movimientos del mismo.
- Personales:
  - *Burbuja del nivel no calada.* Su efecto es más importante en niveles de línea, donde la horizontalidad del eje de colimación depende del perfecto calado del nivel. En caso de nive-



les automáticos y digitales, cuyo uso es prácticamente el único hoy en día, este calado de la burbuja es sólo una aproximación a la horizontal, consiguiéndose ésta mediante el correspondiente compensador.

- *Paralaje*. Produce lecturas incorrectas sobre la mira. Un enfoque adecuado evita este problema.
- *Errores de lectura sobre la mira*. Hay que seleccionar distancias nivel-mira adecuadas a las condiciones meteorológicas y aumentos del antejo que permitan leer sin dificultad sobre la mira.
- *Falta de verticalidad de la mira*. Se puede eliminar utilizando un nivel esférico correctamente calibrado o bien balanceando la mira en dirección de la visual.
- Naturales. Entre estos se pueden considerar:
  - *Esfericidad y refracción*. Se puede minimizar manteniendo la igualdad de distancias a la mira de espalda y de frente, así como leyendo por encima de 0,5 m sobre el cero de la mira.
  - *Variaciones de temperatura*. Su efecto puede causar la dilatación de las miras, pero su cuantía no es importante en nivelación convencional. Conviene realizar visuales tan altas como sea posible, evitando que sean cercanas a fuentes de calor como el suelo o edificios.
  - *Viento*.
  - *Asentamiento del trípode y las miras*. Se debe estacionar sobre terreno firme evitando terreno blando y sin hincar fuertemente las patas sobre el terreno para evitar la reacción de éste sobre el trípode. Igual ocurre con las miras, si para apoyarlas sobre el terreno se utilizan unas bases o soportes, éstas deben quedar firmemente asentadas.

Resumiendo todo lo anterior, en trabajos de exactitud ordinaria todas estas fuentes de incertidumbre se pueden minimizar ajustando y manipulando con cuidado tanto el nivel como las miras, así como empleando métodos de observación adecuados como, p. ej., utilizar miras provistas de nivel esférico, mantener la igualdad de distancia a las miras de espalda y de frente o realizar itinerarios de nivelación dobles (ida y vuelta).

Tradicionalmente, desde el enfoque del error, se venían considerando como los errores accidentales que intervienen en las medidas realizadas con nivel, el “error de horizontalidad”, dependiente de la incertidumbre del compensador o de la sensibilidad del nivel tórico, el “error de puntería” y la falta de verticalidad de la mira. La Norma ISO 17123-2 (ISO, 2001a) simplifica, de forma práctica, la evaluación de la incertidumbre de medida de un desnivel, al englobar en un único valor (desviación típica) las contribuciones a la incertidumbre producidas por los llamados errores accidentales de horizontalidad y puntería. En las siguientes secciones se estudiarán las contribuciones a un desnivel de dos fuentes de incertidumbre: incertidumbre típica de medida con el nivel e inclinación de la mira.

#### 4.1.1. Incertidumbre de medida para un desnivel por el equipo utilizado

La norma ISO 17123-2 (ISO, 2001a) establece el procedimiento a seguir por un usuario para determinar la incertidumbre de medida del nivel utilizado. Aunque la calidad de medida del instrumento depende de diversos factores como la incertidumbre del compensador, aumentos del antejo, etc., la Norma ISO 17123-2 sólo se preocupa por sus efectos globales, evaluando la incertidumbre típica de la medida y expresándola en términos de la desviación típica para 1 km de nivelación doble (desnivel de ida y vuelta promediado)  $\sigma_{ISO-LEV}$ . Así pues, para 1 km de nivelación simple (ida o vuelta), la incertidumbre típica del desnivel será:

$$\sigma_{km} = \pm \sigma_{ISO-LEV} \sqrt{2} \tag{22}$$

La aplicación de este procedimiento ISO por un usuario (incertidumbre de tipo A, ISO (2008), CEM (2000), Howarth y Redgrave

(2008)), al igual que para las medidas angulares y de distancia, hace que se tengan en cuenta las condiciones presentes en el momento de la observación sobre el terreno, que deberían ser representativas de las condiciones atmosféricas habituales en los trabajos de campo. Por tanto, la incertidumbre resultante para un determinado nivel, obtenida aplicando esta norma por el propio usuario, será más acorde a la realidad que el valor proporcionado por el fabricante (incertidumbre de tipo B, ISO (2008), CEM (2000), Howarth y Redgrave (2008)), el cual ha sido determinado en laboratorio sin influencia de las condiciones ambientales habituales de campo.

#### 4.1.2. Incertidumbre por inclinación de la mira

Otra fuente de incertidumbre que afectaría a las medidas realizadas con nivel sería la correspondiente a la falta de verticalidad de la mira. En el caso de utilizar un nivel esférico acoplado a la misma que garantice un ángulo de inclinación máximo de  $\beta$ , la contribución de ésta para una altura de mira  $m$ , se podría cuantificar mediante la siguiente incertidumbre típica  $\sigma_m$  (véase figura 5):

$$\sigma_m = BB'' - BB' = \frac{BB'}{\cos\left(\frac{\text{máx } \beta}{3}\right)} - BB' = m \left[ \sec\left(\frac{\text{máx } \beta}{3}\right) - 1 \right] \tag{23}$$

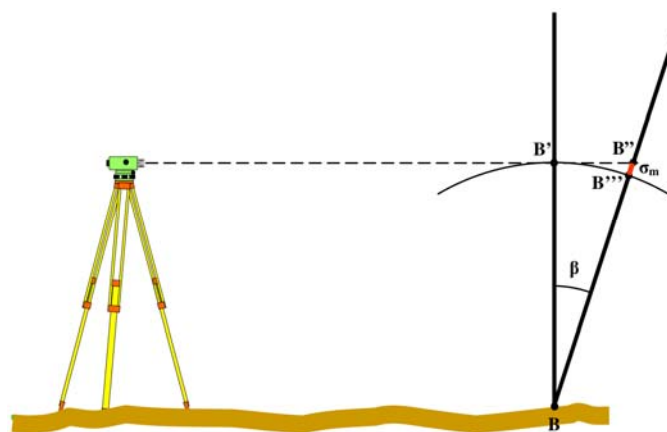


Figura 5. Incertidumbre típica  $\sigma_m$  para la lectura en mira como consecuencia de la falta de verticalidad de la mira producida por una inclinación de ángulo  $\beta$  sobre la vertical.

Nótese que la componente vertical por falta de verticalidad de la mira  $\sigma_m$  se puede considerar que sigue una distribución Normal unidimensional, por lo que la probabilidad de cobertura del 99,7% correspondería a  $3\sigma$  (véase apéndice 2).

En realidad, si durante la nivelación se consigue mantener vertical la mira con la ayuda de un nivel esférico convenientemente calibrado, o bien, en ausencia de éste, se balancea la misma hacia delante y hacia atrás en dirección de la visual cuando se realizan lecturas ópticas (Anderson y Mikhail, 1998; Kavanagh, 2009), esta fuente de incertidumbre, dada su pequeña cuantía, se puede considerar despreciable para una nivelación convencional (Ghilani y Wolf, 2006). A modo de ejemplo, con la expresión [23] se obtiene una  $\sigma_m$  de  $10^{-5}$  m para una altura de mira de 2 m y un valor de  $\beta$  máximo de  $1^\circ$ .

#### 4.2. Incertidumbre típica de medida de un desnivel obtenido con nivelación geométrica

La incertidumbre típica de un desnivel propagada a lo largo de una línea de nivelación es función de la raíz cuadrada del número de estacionamientos del nivel o de la raíz cuadrada de la distancia nivelada (Anderson y Mikhail, 1998).

Según lo expuesto en las secciones 4.1.1 y 4.1.2, la incertidumbre de un desnivel sólo dependerá de la incertidumbre de medida del equipo (ecuación [23]). Por tanto, para  $K$  kilómetros nivelados en

nivelación simple (sólo ida o sólo vuelta), la incertidumbre típica de medida del desnivel obtenido se puede evaluar mediante:

$$\sigma_{AZ} = \pm \sigma_{km} \sqrt{K} = \pm \sigma_{ISO-LEV} \sqrt{2} \sqrt{K} \quad (24)$$

donde  $\sigma_{km}$  es la incertidumbre típica para un desnivel correspondiente a 1 km de nivelación simple.

## 5. Conclusiones

En este artículo se presenta una aplicación de la metodología de evaluación de la incertidumbre de medida según la norma GUM a la medición de ángulos horizontales y verticales, distancias por métodos electromagnéticos y desniveles obtenidos por nivelación geométrica en el campo de la Topografía. Para cada uno de estos mensurandos se analizan las fuentes de incertidumbre que afectan a su medida y se evalúan sus contribuciones a la incertidumbre de medida. A este respecto, es de destacar la importancia que tiene hoy en día la normalización y el cálculo de incertidumbres, tan extendido en otras ramas de la ingeniería, y con frecuencia ignorado en la captura de datos en Geomática. En Topografía, las diferentes partes de la Norma ISO 17123 de evaluación de incertidumbre de medida de los instrumentos topográficos facilitan la evaluación de la contribución a la incertidumbre de medida de cada mensurando de una forma unificada y homogénea al espíritu de la GUM.

Finalmente, este artículo trata de migrar la tradicional forma de evaluar la incertidumbre de medida de cada uno de los mensurandos considerados pasando de la filosofía del “error” a la filosofía de la “incertidumbre”, utilizando para ello la incertidumbre típica como valor cuantitativo que exprese la calidad del resultado de una medida.

## Referencias bibliográficas

- Anderson, J.M. y Mikhail, E.M. (1998) *Surveying: Theory and Practice*. 7th ed. New York, WCB McGraw-Hill.
- Bannister, A., Stanley, R. y Raymond, B. (1998) *Surveying*. 7th ed. Malaysia, PA, Prentice Hall.
- Baykal, O., Tari, E., Coskun, M.Z. y Erden, T. (2005) “Accuracy of point layout with polar coordinates”. *Journal of Surveying Engineering*, 131, 3, pp. 87-93.
- Buckner, R.B. (1991) *Surveying measurements and their analysis*. 3rd ed. California, USA, Landmark.
- Burnside, C.D. (1982) *Electronic distance measurement*. London, Granada Publishing.
- CEM (2000) *Guía para la Expresión de la Incertidumbre de Medida*. Madrid, Centro Español de Metrología.
- CEM (2008) *Vocabulario Internacional de Metrología. Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados*. 3ª edición en español. Madrid, Centro Español de Metrología.
- Cooper, M.A.R. (1987) *Modern theodolites and levels*. 2nd ed. Great Britain, BSP Professional Books.
- Dodson, A. (1978) “EDM systematic errors and instrument calibration”. *ASCE Journal* (actualmente *CIS, Civil Engineering Surveyor*) 3, 4, pp. 20-22.
- Dzierzega, A. y Scherrer, R. (2003a) “Measuring with electronic total stations”. *Survey Review*, 37, 287, pp. 55-65.
- Dzierzega, A. y Scherrer, R. (2003b) “The compact method of testing total stations”. *Survey Review*, 37, 288, pp. 145-154.
- Fialovszky, L. y Holéczy, Gy. (1991) *Surveying instruments and their operational principles*. Budapest, Elsevier.
- Ghilani, C.D. (2004) “Statistics and adjustment explained. Part 3: Error propagation”. *Surveying and Land Information Science*, 64, 1, pp. 29-53.
- Ghilani, C.D. y Wolf, P.R. (2006) *Adjustment computations. Spatial data analysis*. 4th ed. New Jersey, John Wiley & Sons.
- Greenwalt, C. R. y Shultz, M. C. (1962) *Principles of error theory and cartographic applications*. ACIC Technical Report No. 96., St. Louis, Missouri, Aeronautical Chart and Information Center, USAF.
- Howarth, P., Redgrave, F. (2008) *Metrology – in short*. 3rd edition. EURAMET. Germany.
- ISO (2001a) International Standard ISO 17123-2: 2001. Optics and optical instruments – Field procedures for testing geodetic and surveying instruments – Part 2: Levels. Geneva, Switzerland, International Standardization Organization.
- ISO (2001b) International Standard ISO 17123-3: 2001. Optics and optical instruments – Field procedures for testing geodetic and surveying instruments – Part 3: Theodolites. Geneva, Switzerland, International Standardization Organization.
- ISO (2001c) International Standard ISO 17123-4: 2001. Optics and optical instruments – Field procedures for testing geodetic and surveying instruments – Part 4: Electro-optical distance meters (EDM instruments). Geneva, Switzerland, International Standardization Organization.
- ISO (2007) *International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms*, VIM. 3rd ed., Geneva, Switzerland, International Standardization Organization.
- ISO (2008) *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO/IEC 98-3 Geneva, Switzerland, International Standardization Organization.
- Kavanagh, B.F. (2009) *Surveying: principles and applications*. 8th ed., New Jersey, Pearson-Prentice Hall.
- Kennie, T.J.M. (1996) “Electronic angle and distance measurement”, en Kenzie, T.J.M. y Petrie, G. (Ed.): *Engineering Surveying technology*. London, Chapman & Hall, pp. 7-45.
- Laurila, H.S. (1983) *Electronic Surveying in Practice*. New York, John Wiley & Sons.
- Leica Geosystems AG (2004) *Leica TPS800 Series. Manual del usuario. Versión 1.0. Español*. Heerbrugg. Suiza, Leica Geosystems AG.
- Martin, D. y Gatta, G. (2006) “Calibration of total station instruments at the ESRF”. XXIII FIG Congress. Munich, Germany, 8-13 October, 2006.
- Mikhail, E.M. y Gracie G. (1981) *Analysis and Adjustment of Survey Measurements*. New York, Van Nostrand Reinhold.
- Rüeger, J.M. (1996) *Electronic Distance measurement. An introduction*. 4th ed. Berlin. Heidelberg, Springer-Verlag.
- Ruiz, A.M., García, J.L. y Mesa, J.L. (2010) Error, incertidumbre, precisión y exactitud, términos asociados a la calidad espacial del dato geográfico. En: Alcázar y otros (Eds.), *Catastro: formación, investigación y empresa. Selección de ponencias del I Congreso Internacional de Catastro Unificado y Multipropósito*, Servicio de Publicaciones, Universidad de Jaén, pp.95-102 ([http://coello.ujaen.es/congresos/cicum/ponencias/Cicum2010.2.0\\_2\\_Ruiz\\_y\\_otros\\_Error\\_incertidumbre\\_precision.pdf](http://coello.ujaen.es/congresos/cicum/ponencias/Cicum2010.2.0_2_Ruiz_y_otros_Error_incertidumbre_precision.pdf), último acceso: enero 2011).
- Schofield, W. y Breach, M. (2006) *Engineering surveying*. 6th ed. Butterworth-United Kingdom. Heinemann (Elsevier).
- Schwendener, H.R. (1972) “Electronic distances for short ranges: accuracy and calibration procedures”. *Survey Review*, 21, 64, pp. 273-281.
- Staiger, R. (2004) “Le contrôle des instruments géodésiques”. *XYZ*, 99, pp. 39-46.
- Uotila, U.A. (1973) “Useful statistics for land Surveyors”. *Surveying and Mapping*, Vol. XXXIII, 1, pp. 67-77. Reimpreso en *Surveying and Land Information Science*, 66, 1, (2006), pp. 7-18.
- Wolf, P.R. y Ghilani, C.D. (2008) *Elementary surveying. An introduction to Geomatics*. 12th ed., Upper Saddle River, New Jersey, Pearson Prentice Hall.

## Apéndice 1. Símbolos y glosario

En este apéndice se recogen los símbolos utilizados en este artículo así como un breve glosario de los términos más empleados conforme a su definición en la 3ª edición del VIM.

$\sigma_{\alpha}$	Incertidumbre típica de medida para un ángulo horizontal.
$\sigma_{\alpha_{ISO}}$	Contribución a la incertidumbre típica para un ángulo horizontal debida a la incertidumbre típica de medida del equipo.
$\sigma_{\alpha_o}$	Contribución a la incertidumbre típica para un ángulo horizontal debida a las incertidumbres típicas de centrado de las señales visadas.
$\sigma_{\alpha_c}$	Contribución a la incertidumbre típica para un ángulo horizontal debida a la incertidumbre típica de centrado del instrumento.
$\sigma_{\alpha_j}$	Contribución a la incertidumbre típica para un ángulo horizontal debida a la incertidumbre típica por inclinación de la señal visada.
$\sigma_{Ho}$	Contribución a la incertidumbre típica para una dirección angular horizontal debida a la incertidumbre típica de centrado de la señal visada.
$\sigma_{Hj}$	Contribución a la incertidumbre típica para una dirección angular horizontal debida a la incertidumbre típica por inclinación de la señal visada.
$\sigma_{ISO-Hz}$	Incertidumbre típica experimental para la media de una observación angular horizontal observada una vez en ambas posiciones del anteojo (CD y CI), debida a la incertidumbre típica de medida del equipo, según la Norma ISO 17123-3.
$\sigma_{Hz}$	Incertidumbre típica por dirección angular horizontal.
$\sigma_{ISO-V}$	Incertidumbre típica experimental para la media de un ángulo vertical observado en ambas posiciones del anteojo (CD y CI), debida a la incertidumbre típica de medida del equipo, según la Norma ISO 17123-3.
$\sigma_V$	Incertidumbre típica de medida para un ángulo vertical.
$e_o$	Error circular producido al centrar la señal visada.
$\sigma_o$	Incertidumbre típica por centrado de la señal visada.
$U_o$	Incertidumbre expandida al 99,7% por centrado de la señal visada.
$e_c$	Error circular producido al centrar el instrumento sobre su punto de estación.
$\sigma_c$	Incertidumbre típica en el centrado del instrumento sobre su punto de estación.
$U_C$	Incertidumbre expandida al 99,7% por centrado del instrumento sobre su punto de estación.
$\sigma_{c-x}$	Incertidumbre típica sobre el eje X por el centrado del instrumento sobre su punto de estación.
$\sigma_{c-y}$	Incertidumbre típica sobre el eje Y por el centrado del instrumento sobre su punto de estación.
$e_j$	Error circular debido a la inclinación de la señal visada.
$\sigma_j$	Componente planimétrica de la incertidumbre típica por inclinación de la señal visada.
$U_j$	Incertidumbre expandida al 99,7% por inclinación de la señal visada.
$\beta$	Ángulo de inclinación de la señal visada sobre la vertical.

m	Altura del centro del prisma sobre la punta del jalón, o altura de mira leída.
$\sigma_{ISO-EDM}$	Incertidumbre típica experimental para una distancia medida con distanciómetro según la Norma ISO 17123-4.
$\sigma_{Dg}$	Incertidumbre típica de medida para una distancia geométrica.
$\sigma_{ISO-LEV}$	Incertidumbre típica experimental para un desnivel correspondiente a 1 km de nivelación doble (ida y vuelta) según la Norma ISO 17123-2.
$\sigma_{km}$	Incertidumbre típica para un desnivel correspondiente a 1 km de nivelación simple.
$\sigma_m$	Incertidumbre típica para una lectura en mira debida a la inclinación de la misma.
$\sigma_{AZ}$	Incertidumbre típica de medida para un desnivel.

**Condición de repetibilidad de una medición:** condición de medición, dentro de un conjunto de condiciones que incluye el mismo procedimiento de medida, los mismos operadores, el mismo sistema de medida, las mismas condiciones de operación y el mismo lugar, así como mediciones repetidas del mismo objeto o de un objeto similar en un período corto de tiempo.

**Condición de reproducibilidad de una medición:** condición de medición, dentro de un conjunto de condiciones que incluye diferentes lugares, operadores, sistemas de medida y mediciones repetidas de los mismos objetos u objetos similares.

**Corrección:** compensación de un efecto sistemático estimado.

**Error de medida:** diferencia entre un valor medido de una magnitud y un valor de referencia.

**Error sistemático de medida:** componente del error de medida que, en mediciones repetidas, permanece constante o varía de manera predecible.

**Error aleatorio de medida:** componente del error de medida que, en mediciones repetidas, varía de manera impredecible.

**Evaluación tipo A de la incertidumbre de medida:** evaluación de una componente de la incertidumbre de medida mediante un análisis estadístico de los valores medidos obtenidos bajo condiciones de medida definidas.

**Evaluación tipo B de la incertidumbre de medida:** evaluación de una componente de la incertidumbre de medida de manera distinta a una evaluación tipo A de la incertidumbre de medida.

**Exactitud de medida:** proximidad entre un valor medido y un valor verdadero de un mensurando.

**Factor de cobertura:** número mayor que uno por el que se multiplica una incertidumbre típica combinada para obtener una incertidumbre expandida.

**Incertidumbre de medida:** parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos a un mensurando, a partir de la información que se utiliza.

**Incertidumbre típica de medida:** incertidumbre de medida expresada como una desviación típica.

**Incertidumbre típica combinada de medida:** incertidumbre típica obtenida a partir de las incertidumbres típicas individuales asociadas a las magnitudes de entrada de un modelo de medición.

**Incertidumbre expandida de medida:** producto de una incertidumbre típica combinada y un factor mayor que uno.

**Medición:** proceso que consiste en obtener experimentalmente uno o varios valores que pueden atribuirse razonablemente a una magnitud.

**Mensurando:** magnitud que se desea medir.

**Precisión de medida:** proximidad entre las indicaciones o los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto, o de objetos similares, bajo condiciones especificadas.

**Probabilidad de cobertura:** probabilidad de que el conjunto de los valores verdaderos de un mensurando esté contenido en un intervalo de cobertura especificado.

**Repetibilidad de medida:** precisión de medida bajo un conjunto de condiciones de repetibilidad.

**Reproducibilidad de medida:** precisión de medida bajo un conjunto de condiciones de reproducibilidad.

**Sesgo de medida:** valor estimado de un error sistemático.

## Apéndice 2. Relación entre error máximo e incertidumbre

Utilizando distintas distribuciones de probabilidad, como la Normal unidimensional o la Normal circular, etc., se puede pasar de una incertidumbre con una determinada probabilidad de cobertura a otra diferente. Para aplicar la ley de propagación de las incertidumbres, es necesario conocer la desviación típica de las variables implicadas. Así pues, dada una incertidumbre expandida con una determinada probabilidad de cobertura, se podrá evaluar la incertidumbre típica a partir de la distribución adecuada (Normal unidimensional, circular y esférica, véase [Greenwalt y Shultz, 1962](#)).

Tradicionalmente en Topografía, con la idea de cuantificar la incertidumbre, se fijan errores máximos, que se consideran como aquellos con una baja probabilidad de ser rebasados. Autores como [Mikhail y Gracie \(1981\)](#), [Ghilani y Wolf \(2006\)](#) y [Uotila \(1973\)](#) les asignan una probabilidad del 99,7%, es decir, tienen una probabilidad del 0,3% de ser rebasados. Utilizando los conceptos definidos en la GUM, este “error máximo” debe asumirse como una incertidumbre expandida. Para la distribución Normal unidimensional  $N(0,1)$  equivale a utilizar un factor de cobertura de aproximadamente 3, para la distribución Normal circular  $N(0,1)$  de aproximadamente 3,5 y para la Normal esférica  $N(0,1)$  de aproximadamente 4 ([Greenwalt y Shultz, 1962](#)).

Por tanto, fijado (por la experiencia, a partir de referencias, usando una expresión convencional, etc.) un “error máximo”, éste se considerará como incertidumbre expandida (U) al 99,7% y se dividirá por 3, 3,5 ó 4 para obtener la incertidumbre típica correspondiente, según se trate de una distribución unidimensional, circular o esférica respectivamente.

## Apéndice 3. Cuantificación de la incertidumbre en el centrado

En las secciones 2.1.2, 2.1.4, 3.1.2 y 3.1.4 se ha indicado la necesidad de evaluar la incertidumbre en el centrado del instrumento ( $\sigma_c$ ) y de la señal visada ( $\sigma_o$ ) sobre sus puntos de estación con el fin de poder evaluar su contribución a la incertidumbre de medida de un ángulo horizontal y de una distancia geométrica.

Podría plantearse un estudio riguroso para conocer cuál es el comportamiento estadístico de esta incertidumbre en el centrado (es decir, poner en práctica una evaluación de la incertidumbre de tipo A). Otra alternativa es la de utilizar una evaluación de tipo B, recurriendo a los valores considerados por diferentes autores. Así pues, en la [tabla 1](#) se

resumen algunos de los valores que pueden encontrarse en diferentes fuentes bibliográficas. Para cada referencia se indica:

- El parámetro utilizado para cuantificar esta incertidumbre, ya que los diferentes autores se refieren a parámetros diferentes.
- El tipo de estacionamiento, según se utilice plomada física, bastón centrador, plomada óptica o plomada láser.
- El valor sugerido por el autor para el parámetro utilizado y tipo de estacionamiento.
- El valor para  $\sigma_c$  (o  $\sigma_o$ ) que puede extraerse a partir del parámetro y valor sugerido por el autor.

En relación a los parámetros utilizados por los distintos autores, la aportación realizada por [Cooper \(1987\)](#) no queda clara, ya que utiliza como parámetro el término exactitud, que es de carácter cualitativo, y por tanto se desconoce si el autor pretendía referirse a una desviación típica o a un supuesto valor máximo asumido para  $e_c$ . En cambio, el parámetro utilizado por [Mikhail y Gracie \(1987\)](#) es el de desviación típica y, por tanto, puede asumirse como un valor sugerido para  $\sigma_c$ . [Baykal y otros \(2005\)](#) sugieren un valor máximo para  $e_c$ , que puede asumirse como  $U_c$  y, por tanto, dividiéndolo por 3,5 se obtendría el correspondiente valor para  $\sigma_c$ . Por último, algunos fabricantes de instrumentos presentan alguna indicación respecto a la incertidumbre de algún determinado sistema de centrado, como [Leica \(2004\)](#), que especifica en el manual de usuario de algún equipo que la desviación de la plomada láser respecto a la línea de la plomada alcanza un valor de 1,5 mm a una altura de 1,5 m con una probabilidad de  $2\sigma$ . Por tanto, podría asumirse como un valor representativo para  $U_c$  a  $2\sigma$ , y dividiéndolo por 2 se obtendría el valor de  $\sigma_c$ .

Observando la última columna de la [tabla 1](#), puede deducirse un valor sugerido de  $\sigma_c$  (incertidumbre de tipo B) que sea aplicable a la mayoría de situaciones, según el tipo de estacionamiento:

- En el caso de centrado forzado, el valor de  $\sigma_c$  puede considerarse nulo, ya que en la práctica no contribuirá a la incertidumbre de medida de un ángulo ni de una distancia.
- En el resto de casos habrá un valor de  $\sigma_c$  a considerar, cuyo valor mínimo puede establecerse en 0,5 mm (valor mínimo sugerido por [Mikhail y Gracie, 1987](#)). El valor mínimo puede aplicarse al estacionamiento mediante plomada óptica o bastón centrador, siguiendo lo indicado por [Baykal y otros \(2005\)](#).
- En el caso de plomada láser, la incertidumbre típica es algo superior a la del centrado mediante plomada óptica, que podría fijarse en torno a 0,75 - 1 mm.

En cuanto a la incertidumbre típica del centrado de la señal visada, los valores serían similares en caso de utilizar las mismas herramientas de centrado.

En definitiva, se pueden tomar a modo orientativo los valores aquí expuestos, pero tal y como establece [Ghilani \(2004\)](#), será el usuario el que los establezca, dependiendo del tipo de sistema de centrado a utilizar y de las características de la señal o marca sobre la que se estaciona. En general, si se realiza el estacionamiento de equipos actuales, con plomada óptica o láser, sobre una marca nítida y bien definida, el valor de incertidumbre típica en el centrado  $\sigma_c$  se podría considerar con valores en torno a 0,5 - 1 mm.

**Tabla 1**

Parámetros y valores sugeridos por diferentes autores para la incertidumbre en el centrado del instrumento.

Fuente	Parámetro	Estacionamiento	Valor (mm)	$\sigma_c$ o $\sigma_o$ asimilado (mm)
Cooper (1987)	“exactitud”	plomada física bastón centrador plomada óptica	1	$i_c$ ?
Mikhail y Gracie (1987)	desviación típica	no específica	0,5 - 3	0,5 - 3
Baykal y otros (2005)	máx. $e_c$	plomada física bastón centrador plomada óptica centrado forzoso	5 2 1 0,2	1,4 0,6 0,3 0,06 $\approx$ 0
Leica (2004)	$U_c (2\sigma)$	plomada láser	1,5	0,75

## Apéndice 4. Consideraciones sobre la inclinación de la señal visada

Una de las fuentes de incertidumbre presentes cuando con una estación total se observa directamente al centro del prisma, al medir un ángulo horizontal o la distancia geométrica, es su falta de verticalidad respecto al punto sobre el que se ha estacionado. Su contribución a la incertidumbre del ángulo horizontal y de la distancia geométrica ha sido tratada en las secciones 2.1.3 y 3.1.3.

Respecto a la inclinación de la mira en la nivelación geométrica, en la sección 4.1.2 se ha establecido que esta fuente de incertidumbre prácticamente no afecta al desnivel, resultando, por tanto, despreciable si se mantiene la mira vertical durante su lectura. Para ello, se puede utilizar un nivel esférico corregido acoplado a la misma y mantenerlo perfectamente calado.

En este apéndice se realizarán una serie de consideraciones sobre el ángulo  $\beta$  de inclinación de la señal visada y su influencia en los mensurandos distancia geométrica y ángulo horizontal.

### A4.1. Estimación del ángulo $\beta$ de inclinación de la señal visada

Para tener una estimación tanto del ángulo  $\beta$  de inclinación debido a la falta de verticalidad de la señal visada como de la magnitud lineal que esto supone a una altura visada de la señal, se ha llevado a cabo un experimento con diversos niveles esféricos de 8' de sensibilidad (jalón GLN111 de Leica con nivel esférico acoplado), los cuales podrían considerarse representativos de la mayoría de los existentes en el mercado. En el caso de que un usuario tuviese un nivel de sensibilidad diferente, siempre podrá repetir el experimento y obtener sus valores de inclinación para el ángulo  $\beta$ .

Una vez comprobado el perfecto estado de calibración de diversos niveles adosados a jalones, se han calculado los valores del ángulo  $\beta$  de inclinación y del valor lineal  $m\beta$  de esta inclinación a una altura de 1,3 m para las distintas posiciones del nivel que se muestran en la figura 6 (véase tabla 2 y figura 3a).  $m\beta$  representa el desplazamiento planimétrico del centro del prisma respecto a su vertical en las cuatro posiciones diferentes.

De los resultados obtenidos (véase tabla 2) se puede concluir que:

- Si la burbuja se encuentra perfectamente calada, el desplazamiento del centro del prisma sobre su vertical no es apreciable y, por tanto, se puede despreciar.
- Si la burbuja se encuentra tangente a la circunferencia grabada, el desplazamiento es del orden de 1 mm, resultando el ángulo  $\beta$  del orden de 2'-3'.
- Si la burbuja se encuentra en una posición intermedia respecto a la circunferencia grabada, el desplazamiento es del orden de 5 mm, siendo el ángulo  $\beta$  del orden de 12'-14'.
- Si la burbuja se encuentra tangente a la circunferencia exterior del nivel, el desplazamiento es del orden de 9 mm, siendo el ángulo  $\beta$  del orden de 20'-23'.

Usualmente, los casos a y b sólo se podrán garantizar si el nivel está acoplado a una plataforma nivelante o a un jalón que se mantiene vertical con la ayuda de un trípode de pinza, un bípode o casos similares. Los casos más extremos, c y d, se producen cuando el nivel está acoplado a un jalón que se mantiene vertical sujetándolo con la mano, y en el que la burbuja oscila continuamente.

### A4.2. Utilización de plataforma nivelante, trípode de pinza o bípode

Si cuando se mide una distancia con distanciómetro o un ángulo horizontal observando directamente al prisma, éste se sitúa sobre una plataforma nivelante montada sobre el trípode, el ángulo  $\beta$  de inclinación será muy pequeño, siempre y cuando el nivel esférico esté

perfectamente calado y corregido. En tal caso, el desplazamiento debido a la falta verticalidad del prisma sobre la vertical de su punto de estación puede ser del orden de 1 mm o menor para niveles esféricos del tipo 10' u 8' de sensibilidad, típicos de estas plataformas nivelantes (casos a y b de la figura 6 y la tabla 2).

Si el conjunto jalón-prisma se mantiene vertical con la ayuda de un trípode de pinza o un bípode, y el nivel esférico está perfectamente calado y corregido, se pueden considerar igualmente desplazamientos del orden de 1 mm o menores, similar al caso de la plataforma nivelante. En ambos casos, esta fuente de incertidumbre debida a la falta de verticalidad de la señal visada, dada su pequeña cuantía, podría despreciarse.

### A4.3. Sujeción manual del jalón

El mayor efecto de esta fuente de incertidumbre se produce cuando se mantiene vertical el jalón sujetándolo con la mano e intentando calar la burbuja del nivel. Debido al pulso del operador que sujeta el jalón, la burbuja no siempre quedará perfectamente centrada y podría variar de forma continua entre los distintos casos mostrados en la figura 6. A mayor separación de la burbuja respecto al centro del nivel, mayor será el ángulo  $\beta$  de inclinación, y mayor desplazamiento planimétrico debido a la falta de verticalidad.

Asumiendo que en el peor de los casos, cuando un operador mantiene vertical el jalón sujetándolo con la mano ayudándose del nivel esférico, la burbuja quedara tangente al círculo exterior (véase figura 6d), será este valor el que se tome como máximo ángulo  $\beta$  de inclinación para la evaluación de la incertidumbre de medida correspondiente a la falta de verticalidad de la señal visada en los distintos mensurandos. Leyendo la columna (d) de la tabla 2, sería el caso de un desplazamiento planimétrico de 0,009 m a una altura de 1,3 m del prisma, lo que equivale a un ángulo  $\beta$  de unos 23', o bien a 0,007 m de desplazamiento planimétrico por cada metro de altura del jalón.

Traduciéndolo a la terminología de la incertidumbre de medida, el máximo desplazamiento debería ser considerado como la incertidumbre expandida planimétrica por inclinación de la señal visada ( $U_j$ ). Sería aplicable al evaluar la contribución a la incertidumbre de medida de un ángulo horizontal (sección 2.1.3) o de una distancia geométrica (sección 3.1.3). Al tener un carácter circular, dividiendo la incertidumbre expandida ( $U_j$ ) por 3,5 se obtendría la incertidumbre típica correspondiente (según lo comentado en el apéndice 2), es decir, en este caso, y para una altura de  $m=1,3$  m,  $\sigma_j = 0,009/3,5 = 0,0026$  m  $\approx$  0,003 m.

A efectos prácticos en los trabajos de campo, con la ayuda de un jalón cruzado al jalón que sostiene al prisma, se puede minimizar el efecto de su falta de verticalidad (Kavanagh, 2009).

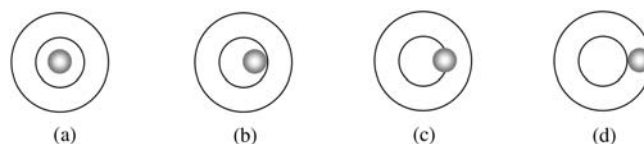


Figura 6. Distintas posiciones de la burbuja del nivel esférico acoplado al jalón para las que se ha determinado su inclinación. (a) Burbuja calada, (b) burbuja tangente a la circunferencia grabada, (c) burbuja en posición intermedia respecto a la circunferencia grabada y (d) burbuja tangente a la circunferencia exterior del nivel.

Tabla 2

Valores del ángulo de inclinación  $\beta$  del jalón, de la magnitud lineal que supone este ángulo  $\beta$  a una altura de 1,3 m ( $m\beta$ ) y de los milímetros por metro (mm/m) de altura de jalón que supone este ángulo de inclinación para las distintas situaciones (a, b, c y d) presentadas en la Figura 6.

	Posición (a)	Posición (b)	Posición (c)	Posición (d)
$\beta$ [°]	$\approx 0$	2-3	12-14	20-23
$m\beta$ (m)	$\approx 0$	0,001	0,005	0,009
$m\beta$ (mm/m)	$\approx 0$	0,0006	0,0035	0,0067