Pizarra:

1. La transformación proyectiva se realiza a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x = \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3}{c_1 X + c_2 Y + 1} \qquad (1)$$
$$y = \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3}{c_1 X + c_2 Y + 1}$$

Que se puede expresar de la forma

$$X = a_1 x + a_2 y + a_3 - c_1 xX - c_2 yX \qquad (2)$$
$$Y = b_1 x + b_2 y + b_3 - c_1 xY - c_2 yY$$

2. Se obtiene un sistema matricial con la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -xX & -yX \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -xY & -yY \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

3. Con todos los puntos comunes a ambos sistemas se plantea el ajuste mínimo cuadrático de la forma:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 X_1 & -y_1 X_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1 Y_1 & -y_1 Y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2 X_2 & -y_2 X_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2 Y_2 & -y_2 Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n X_n & -y_n X_n \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x_n Y_n & -y_n Y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Pizarra:

$$
\begin{bmatrix}
x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -y_1X_1 \\
0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1Y_1 & -y_1Y_1 \\
x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -y_2X_2 \\
0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2Y_2 & -y_2Y_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_nX_n & -y_nX_n \\
0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x_nY_n & -y_nY_n
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{Y_1} \\ V_{X_2} \\ V_{Y_2} \\ \vdots \\ V_{X_n} \\ V_{Y_n} \end{bmatrix}
$$

4. Que se corresponde con un sistema del tipo:

$$A\hat{x} - t = \hat{v}$$

5. Resolviéndose de forma:

$$\hat{x} = \left(A^T PA\right)^{-1} A^T Pt$$

6. Por último, los residuos obtenidos tras el ajuste serán:

$$\hat{v} = A\hat{x} - t$$

7. Cálculo de coordenadas

Para la transformación de coordenadas se calcula la matriz de transformación H (para el caso directo x→X) y la matriz de transformación H^{-1} para el caso inverso (X→x).

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

De tal manera que

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad X = \frac{X'}{Z'} \qquad Y = \frac{Y'}{Z'}$$