Pizarra:

1. La transformación bidimensional rígida se realiza a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_B &= x_A \cos\theta - y_A sen\theta + X_0 \\ Y_B &= x_A\ sen\theta + y_A \cos\theta + Y_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

2. Si se sustituye:

$$\begin{aligned} a &= \cos\theta \\ b &= sen\theta \end{aligned} \qquad \tan\theta = b/a \quad (2)$$

$$\begin{aligned} X_B &= a\ x_A - b\ y_A + X_0 \\ Y_B &= b\ x_A + a\ y_A + Y_0 \end{aligned} \qquad (3)$$

3. Se obtiene un sistema matricial con la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y & 1 & 0 \\ y & x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

4. Con todos los puntos comunes a ambos sistemas se plantea el ajuste mínimo cuadrático de la forma:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & -y_2 & 1 & 0 \\ y_2 & x_2 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & -y_2 & 1 & 0 \\ y_2 & x_2 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{Y_1} \\ V_{X_2} \\ V_{Y_2} \\ \vdots \\ V_{X_n} \\ V_{Y_n} \end{bmatrix}$$

5. Que se corresponde con un sistema del tipo:

$$A\hat{x} - t = \hat{v}$$

6. Resolviéndose de forma:

$$\hat{x} = \left(A^T P A\right)^{-1} A^T P t$$

Pizarra:

7. Por último, los residuos obtenidos tras el ajuste serán:

$$\hat{v} = A\hat{x} - t$$